УДК 517.9

О РЕШЕНИЯХ ТИПА АГРЕГИРОВАННЫХ БЕГУЩИХ ВОЛН ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

ON THE SOLUTIONS TYPE OF AGGREGATED TRAVELLING WAVES FOR LINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH VARIABLE COEFFICIENTS

И.В. Рахмелевич
I.V. Rakhmelevich

Нижегородский национальный исследовательский университет,
Россия, 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Nizhny Novgorod National Research University, 23 Gagarin Ave, Nizhny Novgorod, 603950, Russia

E-mail: igor-kitpd@yandex.ru

Аннотация. Исследован новый тип решений для многомерных линейных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами – решения типа агрегированных бегущих волн (АБВ). Рассмотрены уравнения с линейным аддитивно-однородным дифференциальным оператором и уравнения с линейным дифференциальным оператором общего вида. Доказаны теоремы о достаточных условиях существования решений типа АБВ.

Resume. There is investigated a new type of solutions for linear multi-dimensional partial differential equations with variable coefficients, i.e. the solutions type of aggregated travelling waves (ATW). The equations with linear additional-homogeneous differential operator and the equations with linear differential operator of general type were considered. There are proved the theorems about sufficient conditions of existence of ATW type solutions.

Ключевые слова: уравнение в частных производных, бегущая волна, однородный дифференциальный оператор, агрегированные переменные.

Key words: partial differential equation, travelling wave, homogeneous differential operator, aggregated variables.

Введение

Как известно, решения типа бегущей волны (БВ) являются одними из наиболее простых и хорошо изученных типов решений для многих важных классов дифференциальных уравнений в частных производных [1-6]. Такие решения для уравнений с N независимыми переменными $x_1,\ldots,x_N$ имеют вид:

$$u(x_1,\ldots,x_N)=U(z),\quad z=\sum_{n=1}^{N}c_n x_n\,, \qquad (1)$$

где c_n – некоторые постоянные коэффициенты.

Решение вида (1) зависит от линейной комбинации исходных независимых переменных. Основное преимущество использования таких решений заключается в возможности редукции исходного N-мерного уравнения к обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ) относительно функции $U(z)$. Целью данной работы является нахождение более сложных решений, которые могут рассматриваться как обобщения решений типа БВ. Предполагается, что эти решения будут зависеть от линейных комбинаций по некоторым подмножествам независимых переменных.

Пусть множество значений $I = \{1,\dots,N\}$ индекса n, нумерующего независимые переменные, разбито на K непересекающихся подмножеств I_k $(k \in \Xi)$. Здесь и далее $\Xi = \{1,\dots,K\}$ – множество значений индекса k. В соответствии с этим множество независимых переменных $X = \{x_1,\dots,x_N\}$ разбито на K непересекающихся подмножеств $X_k = \{x_i\}_{i \in I_k}$.

Введем агрегированные переменные z_k с помощью следующего выражения:

$$z_k = \sum_{n \in I_k} c_n x_n \,, \tag{2}$$

т.е. эти переменные представляют собой линейные комбинации переменных подмножества X_k; c_n – постоянные коэффициенты.

Определение.

Агрегированными бегущими волнами (АБВ) будем называть решения, выражающиеся через функции агрегированных переменных, причем каждая из этих функций либо зависит от одной переменной и может быть найдена в результате решения некоторого ОДУ, либо является произвольной функцией любого множества агрегированных переменных.

Далее в настоящей работе рассматриваются решения типа АБВ для некоторых классов многомерных линейных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами.

1. Линейное многомерное уравнение с аддитивно-однородным дифференциальным оператором

Рассмотрим линейное уравнение в частных производных относительно неизвестной функции $u(x_1,\dots,x_N)$ с аддитивно-однородным дифференциальным оператором, т.е. оператором, представимым в виде суммы линейных однородных операторов одинаковых порядков, действующих по разным переменным:

$$\sum_{k=1}^{K} \hat{L}_k^{(m)} u = 0 \tag{3}$$

где

$$\hat{L}_k^{(m)} = \sum_{\sigma_m \in I_k} a_{\sigma_m}(X_k) \frac{\partial^m u}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} \tag{3a}$$

– линейный однородный дифференциальный оператор порядка m, действующий по переменным X_k, $a_{\sigma_m}(X_k)$ – некоторые заданные функции этих переменных. Здесь и далее используется мультииндекс $\sigma_m = \{i_1,\dots i_m\}$; причем запись $\sigma_m \in I_k$ означает $i_1 \in I_k,\dots,i_m \in I_k$. Существование решений типа АБВ для уравнения (3) определяется следующей теоремой.

Теорема 1.

Если существуют коэффициенты c_n $(n \in I)$ и *функции* $\varphi_{k,m}(z_k)$ $(k \in \Xi)$, *такие, что при всех* $k \in \Xi$ *удовлетворяются условия*

$$\sum_{\sigma_m \in I_k} a_{\sigma_m}(X_k) c_{i_1} \dots c_{i_m} = \varphi_{k,m}(z_k), \tag{4}$$

то уравнение (3) имеет решения типа АБВ следующих видов:

$$u(x_1,\dots,x_N) = \sum_{k\in\Xi_+} U_k(z_k) + U_0(Z_0), \tag{5}$$

$$u(x_1,\dots,x_N) = \prod_{k\in\Xi_+} U_k(z_k) + U_0(Z_0), \tag{6}$$

$$u(x_1,\dots,x_N) = \sum_{s=1}^{S} \prod_{k\in\Xi_{s+}} U_k(z_k) + U_0(Z_0), \tag{7}$$

где подмножество агрегированных переменных $Z_0 = \{z_k\}_{k\in\Xi_0}$; $\Xi_0 \subseteq \Xi$ *- подмножество значений* k *, при которых* $\varphi_{k,m}(z_k) \equiv 0$; $\Xi_+ = \Xi \setminus \Xi_0$; $U_0(Z_0)$ *- произвольная функция от переменных, принадлежащих подмножеству* Z_0 *, дифференцируемая необходимое число раз по всем аргументам.*

Доказательство.

Рассмотрим функцию от агрегированных переменных

$$u = U(z_1,\dots,z_K) \tag{8}$$

Подставим функцию (8) в уравнение (3), тогда с учетом (3a), после вычисления производных и элементарных преобразований, это уравнение принимает вид:

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{\partial^m U}{\partial z_k^m} \sum_{\sigma_m \in I_k} a_{\sigma_m}(X_k) c_{i_1} \dots c_{i_m} = 0 \tag{9}$$

Если существуют коэффициенты c_n $(n\in I)$ и функции $\varphi_{k,m}(z_k)$, при которых для всех $k\in\Xi$ удовлетворяются условия (4), то уравнение (9) можно представить как

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{\partial^m U}{\partial z_k^m} \varphi_{k,m}(z_k) = 0 \tag{10}$$

Учитывая данное выше определение множеств Ξ_+, Ξ_0, нетрудно видеть, что любое решение уравнения (10) может быть представлено в виде:

$$U(z_1,\dots,z_K) = U_+(Z_+) + U_0(Z_0) \tag{11}$$

где $U_+(Z_+)$ - некоторое частное решение уравнения

$$\sum_{k\in\Xi_+} \frac{\partial^m U_+}{\partial z_k^m} \varphi_{k,m}(z_k) = 0 \tag{12}$$

С помощью метода аддитивного разделения переменных[1-3] нетрудно получить следующее решение уравнения (12):

$$U_+(Z_+) = \sum_{k\in\Xi_+} U_k(z_k), \quad U_k(z_k) = \lambda_k \int dz_k \int \dots \int \frac{dz_k}{\varphi_{k,m}(z_k)} + P_{m-1}(z_k), \tag{13}$$

где выполняется m - кратное интегрирование по z_k , $P_{m-1}(z_k)$ – полином степени $m-1$ с произвольными коэффициентами, λ_k – константы разделения переменных, удовлетворяющие условию:

$$\sum_{k\in\Xi_+}\lambda_k = 0 \tag{13a}$$

Аналогичным образом, с помощью мультипликативного разделения переменных находим следующее решение уравнения (12):

$$U_+(Z_+) = \prod_{k\in\Xi_+} U_k(z_k) \tag{14}$$

где функции $U_k(z_k)$ являются решениями следующих ОДУ:

$$U_k^{(m)}(z_k) - \frac{\lambda_k}{\varphi_{k,m}(z_k)} U_k(z_k) = 0 \tag{14a}$$

λ_k – константы, удовлетворяющие условию(13а).

Пусть теперь $\Xi_+ = \bigcup_{s=1}^{S} \Xi_{s+}$ – объединение непересекающихся подмножеств Ξ_{s+}. Используя метод комбинированного разделения переменных [7,8], решение уравнения (12) будем искать в виде:

$$U_+(Z_+) = \sum_{s=1}^{S} \prod_{k\in\Xi_{s+}} U_k(z_k) \tag{15}$$

Подставляя (15) в уравнение (12), преобразуем это уравнение к виду:

$$\sum_{s=1}^{S} \left\{ \prod_{l\in\Xi_{s+}} U_l(z_l) \cdot \sum_{k\in\Xi_{s+}} \frac{U_k^{(m)}(z_k)}{U_k(z_k)} \varphi_{k,m}(z_k) \right\} = 0 \tag{16}$$

Так как каждое из слагаемых в фигурных скобках в левой части (16) зависит от разных подмножеств переменных, то в соответствии с известной схемой метода разделения переменных, уравнение (16) можно удовлетворить только в том случае если при всех $s = 1,\ldots,S$ выполняются условия:

$$\prod_{l\in\Xi_{s+}} U_l(z_l) \cdot \sum_{k\in\Xi_{s+}} \frac{U_k^{(m)}(z_k)}{U_k(z_k)} \varphi_k(z_k) = \mu_s\,, \tag{17}$$

где μ_s – некоторые постоянные, удовлетворяющие условию:

$$\sum_{s=1}^{S} \mu_s = 0 \tag{17a}$$

Проанализируем уравнение (17) при дополнительном требовании, что $\mu_s = 0$ при всех $s = 1,\ldots,S$; тогда из (17) следует:

$$\sum_{k\in\Xi_{s+}} \frac{U_k^{(m)}(z_k)}{U_k(z_k)} \varphi_{k,m}(z_k) = 0 \tag{18}$$

Из уравнения (18) нетрудно получить, что функции $U_k(z_k)$ должны удовлетворять уравнению (14а), а постоянные λ_k должны удовлетворять условию

$$\sum_{k\in\Xi_{s+}} \lambda_k = 0\,. \tag{18a}$$

Таким образом, для исходного уравнения получены решения вида (11), где $U_+(Z_+)$ определяется выражением (13) при аддитивном разделении переменных; выражениями (14) и (14а) при мультипликативном разделении переменных; выражениями (15) и (14а) при комбинированном разделении переменных. Теорема доказана.

Кроме решений, перечисленных в теореме 1, существуют дополнительные решения для функций $\varphi_{k,m}(z_k)$ специального вида, что определяется следующей теоремой.

Теорема 2.

Пусть при всех $k \in \Xi$ удовлетворяются условия (4), причем для всех $k \in \Xi_+$

$$\varphi_{k,m}(z_k) = \alpha_k z_k^{\ m}, \tag{19}$$

где α_k – некоторые постоянные коэффициенты.

Тогда уравнение (3) имеет следующие решения типа АБВ:

$$u(x_1,\ldots,x_N) = P_{m-1}(\eta) + U_0(Z_0), \qquad \eta = \prod_{k\in\Xi_+} z_k \tag{20}$$

если $\sum\limits_{k\in\Xi_+} \alpha_k \neq 0$ *;* (20a)

$$u(x_1,\ldots,x_N) = \Phi(\eta) + U_0(Z_0), \tag{21}$$

если $\sum\limits_{k\in\Xi_+} \alpha_k = 0$ (21a)

где $\Phi(\eta)$ – произвольная m-кратно дифференцируемая функция, $P_{m-1}(\eta)$ – полином степени $m-1$ с произвольными коэффициентами.

Доказательство

Так как выполняются условия (4), то согласно доказательству теоремы 1, искомое решение можно представить в виде (11), где функция $U_+(Z_+)$ является решением уравнения (12). Решение этого уравнения будем искать в виде:

$$U_+ = U_+(\eta) \tag{22}$$

где η определяется второй из формул (20).

Подставляя выражение (22) в уравнение (12) и выполняя дифференцирование, получаем:

$$\eta^m U_+^{(m)}(\eta) \sum_{k\in\Xi_+} \alpha_k = 0 \tag{23}$$

Если выполняется условие (20а), то из (23) следует, что $U_+^{(m)}(\eta) = 0$, откуда получаем решение в виде (20). Если же коэффициенты α_k удовлетворяют условию (21а), то решением уравнения (23) является любая m-кратно дифференцируемая функция, откуда следует решение в виде (21). Теорема доказана.

2. Линейное многомерное уравнение с дифференциальным оператором общего вида

Рассмотрим теперь уравнение, содержащее линейный дифференциальный оператор общего вида:

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{K}\hat{L}_k^{(m)}u = 0 \tag{24}$$

где $\hat{L}_k^{(m)}$ определяется выражением (3а).

Теорема 1, доказанная в п.1, непосредственно обобщается для уравнения (24). Рассмотрим решения типа АБВ для этого уравнения. Аналогично доказательству теоремы 1, подставим функцию (8) в уравнение (24). Предполагая выполненным условие (4), получаем:

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{K}\frac{\partial^m U}{\partial z_k^m}\varphi_{k,m}(z_k) = 0 \tag{25}$$

Примем, что $\Xi_0 \subseteq \Xi$ - множество значений k, при которых $\varphi_{k,m}(z_k) \equiv 0$ для всех $1 \le m \le M$; $\Xi_+ = \Xi \setminus \Xi_0$. Аналогично п.1, решение уравнения (25) может быть представлено в виде (11), причем $U_+(Z_+)$ - некоторое частное решение уравнения

$$\sum_{k\in\Xi_+}\sum_{m=1}^{M}\frac{\partial^m U_+}{\partial z_k^m}\varphi_{k,m}(z_k) = 0 \tag{26}$$

Используя аддитивное разделение переменных в виде первой из формул (13), получаем, что функции $U_k(z_k)$ должны удовлетворять следующим ОДУ:

$$\sum_{m=1}^{M}U_k^{(m)}(z_k)\varphi_{k,m}(z_k) = \lambda_k \tag{27}$$

причем постоянные λ_k должны удовлетворять условию (13а).

Для мультипликативного разделения переменных в виде (14) функции $U_k(z_k)$ должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$\sum_{m=1}^{M}U_k^{(m)}(z_k)\varphi_{k,m}(z_k) - \lambda_k U_k(z_k) = 0 \tag{28}$$

где постоянные λ_k также удовлетворяют условию (13а).

Для комбинированного разделения переменных, подставив выражение (15) в уравнение (26), получаем:

$$\sum_{s=1}^{S}\left\{\prod_{l\in\Xi_{s+}}U_l(z_l)\cdot\sum_{k\in\Xi_{s+}}\sum_{m=1}^{M}\frac{U_k^{(m)}(z_k)}{U_k(z_k)}\varphi_{k,m}(z_k)\right\} = 0 \tag{29}$$

Так как каждое из слагаемых в фигурных скобках в левой части (29) соответствует определенному значению индекса s и зависит только от переменных z_k $(k \in \Xi_{s+})$, то уравнение (29) можно удовлетворить только в том случае если при всех $s = 1,\ldots,S$ выполняются условия:

$$\prod_{l\in\Xi_{s+}} U_l(z_l)\cdot\sum_{k\in\Xi_{s+}}\sum_{m=1}^{M}\frac{U_k^{(m)}(z_k)}{U_k(z_k)}\varphi_{k,m}(z_k)=\mu_s\,, \tag{30}$$

где постоянные μ_s должны удовлетворять условию (17а).

Аналогично п.1, потребуем, чтобы $\mu_s=0$ при всех $s=1,\ldots,S$, тогда из уравнения (30) следует:

$$\sum_{k\in\Xi_{s+}}\sum_{m=1}^{M}\frac{U_k^{(m)}(z_k)}{U_k(z_k)}\varphi_{k,m}(z_k)=0 \tag{31}$$

Поскольку левая часть (31) представляет собой сумму слагаемых, зависящих от разных переменных, то это уравнение можно удовлетворить только при выполнении условий

$$\sum_{m=1}^{M}\frac{U_k^{(m)}(z_k)}{U_k(z_k)}\varphi_{k,m}(z_k)=\lambda_k \tag{32}$$

где постоянные λ_k удовлетворяют условию (18а). Из (32) следует, что для рассматриваемого случая комбинированного разделения переменных функции $U_k(z_k)$ являются решениями уравнения (28).

Рассмотрим обобщение теоремы 2 на уравнение (24). Определим подмножества $\Xi_+^{(1)}\subseteq\Xi_+$, $\Xi_+^{(2)}\subseteq\Xi_+$ следующим образом: при всех $k\in\Xi_+^{(1)}$ и $m>1$ выполнены условия $a_{\sigma_m}(X_k)\equiv 0$, т.е. для переменных принадлежащих соответствующим подмножествам X_k, $k\in\Xi_+^{(1)}$ уравнение (24) содержит производные только первого порядка; $\Xi_+^{(2)}=\Xi_+\setminus\Xi_+^{(1)}$.

Теорема 3.

Пусть при всех $k\in\Xi$ удовлетворяются условия (4), причем для всех $k\in\Xi_+^{(1)}$ функции $\varphi_{k,1}(z_k)$ могут быть произвольными, а для всех $k\in\Xi_+^{(2)}$

$$\varphi_{k,m}(z_k)=\alpha_{k,m}z_k^{\,m}, \tag{33}$$

где $\alpha_{k,m}$ – некоторые постоянные коэффициенты.

Тогда уравнение (24) имеет следующие решения типа АБВ:

$$u(x_1,\ldots,x_N)=U_+(\eta)+U_0(Z_0),\qquad \eta=C\exp\left\{\sum_{k\in\Xi_+^{(1)}}\int\frac{dz_k}{\varphi_{k,m}(z_k)}\right\}\prod_{k\in\Xi_+^{(2)}}z_k \tag{34}$$

$$u(x_1,\ldots,x_N)=\Phi(\eta)+U_0(Z_0), \tag{35}$$

где $\Phi(\eta)$ – произвольная m-кратно дифференцируемая функция, а функция $U_+(\eta)$ является решением ОДУ:

$$\sum_{m=1}^{M}A_m\eta^m U_+^{(m)}(\eta)=0\,; \tag{36}$$

Решение (35) существует, если при всех $1\le m\le M$ выполняются условия

$$A_m=0\,; \tag{37}$$

решение (34) существует, если условия (37) выполнены не при всех $1\le m\le M$.

Доказательство.

Согласно рассуждениям, приведенным после уравнения (25), искомое решение может быть представлено в виде (11), причем функция $U_+(Z_+)$ является решением уравнения (26). Решение этого уравнения будем искать в виде (22), где η определяется выражением:

$$\eta = \prod_{k\in\Xi_+^{(1)}} V_k(z_k) \prod_{k\in\Xi_+^{(2)}} z_k \tag{38}$$

где $V_k(z_k)$ – некоторые неизвестные функции, подлежащие определению в дальнейшем.

С учетом приведенного выше определения множеств $\Xi_+^{(1)}$, $\Xi_+^{(2)}$ уравнение (26) можно преобразовать к виду:

$$\sum_{k\in\Xi_+^{(1)}} \frac{\partial U_+}{\partial z_k}\varphi_{k,1}(z_k) + \sum_{k\in\Xi_+^{(2)}} \sum_{m=1}^{M} \frac{\partial^m U_+}{\partial z_k^m}\varphi_{k,m}(z_k) = 0 \tag{39}$$

С учетом (38) первое слагаемое в левой части (35) можно записать так:

$$\sum_{k\in\Xi_+^{(1)}} \frac{\partial U_+}{\partial z_k}\varphi_{k,1}(z_k) = \eta U_+'(\eta) \sum_{k\in\Xi_+^{(1)}} \frac{V_k'(z_k)}{V_k(z_k)}\varphi_{k,1}(z_k) \tag{40}$$

Для определения функций $V_k(z_k)$ потребуем, чтобы при всех $k\in\Xi_+^{(1)}$ было выполнено условие:

$$\frac{V_k'(z_k)}{V_k(z_k)}\varphi_{k,1}(z_k) = \lambda_k, \tag{41}$$

где λ_k – некоторые постоянные.

Если при всех $k\in\Xi_+^{(1)}$ выполняется условие (41), то функция $U_+(\eta)$ является решением ОДУ (36), причем коэффициенты A_m определяются выражением:

$$A_m = \sum_{k\in\Xi_+^{(2)}} \alpha_{k,m} \ (m>1), \quad A_1 = \sum_{k\in\Xi_+^{(1)}} \lambda_k + \sum_{k\in\Xi_+^{(2)}} \alpha_{k,1} \tag{42}$$

Так как функции $\varphi_{k,1}(z_k)$ определяются выражением (4), то они могут считаться заданными. Поэтому уравнение (41) может рассматриваться как ОДУ относительно $V_k(z_k)$, решая которое, находим:

$$V_k(z_k) = C_k \exp\left\{\lambda_k \int \frac{dz_k}{\varphi_{k,1}(z_k)}\right\} \tag{43}$$

где C_k – произвольные постоянные.

Подставляя (43) в выражение (38), получаем выражение (34) для η, причем постоянная C определяется выражением $C = \prod_{k\in\Xi_+^{(1)}} C_k$.

Далее, если условия (37) выполняются при всех $1\le m\le M$, то решением уравнения (36) является произвольная m-кратно дифференцируемая функция, и следовательно, имеем решение исходного уравнения в виде (35). Если же при некоторых значениях $1\le m\le M$ условия (37) не выполняются, то получаем искомое решение в виде (34), где функция $U_+(\eta)$ является решением уравнения (36). Теорема доказана.

Заключение

Таким образом, в данной работе исследован новый тип решений для многомерных линейных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами – решения типа агрегированных бегущих волн. Указанные решения зависят от агрегированных переменных, являющихся линейными комбинациями некоторых подмножеств множества независимых переменных. Для уравнений с линейным аддитивно-однородным оператором и оператором общего вида доказаны теоремы о достаточных условиях существования решений указанного типа. Решение исходного уравнения при этом сводится к решению некоторых ОДУ, а также может содержать произвольные функции или полиномы с произвольными коэффициентами от агрегированных переменных.

Список литературы
References

1. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. 2002. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения. М., Физматлит, 432 .

Polyanin A.D. and Zaitsev V. F. 2012. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton.

2. Полянин А.Д. 2001. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М., Физматлит, 576.

Polyanin A.D. 2002. Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton.

3. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. 2005. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М., Физматлит, 256.

Polyanin, A.D., Zaitsev, V. F., Zhurov A. I. 2005. Metody resheniya nelineynyh uravneniy matematicheskoy fiziki i mehaniki. M., Fizmatlit (In Russian).

4. Баренблатт Г.И. 1978. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. М., Гидрометеоиздат, 208.

Barenblatt G.I. 1978. Podobie, avtomodelnost, promezhutochnaya asymptotika. M., Gidrometeoizdat (In Russian).

5. Полянин А.Д. 2004. Неклассические (неинвариантные) решения типа бегущей волны и автомодельные решения. Доклады РАН, 398(1): 33-37.

Polyanin A. D. 2004. Nonclassical (noninvariant) traveling-wave solutions and self-similar solutions, Doklady Mathematics, 70 (2) : 790–793.

6. Рахмелевич И.В. 2015. О двумерных гиперболических уравнениях со степенной нелинейностью по производным. Вестник Томского государственного университета, № 1(33) : 12-19.

Rakhmelevich I.V. 2015. O dvumernyh hyperbolicheskih uravneniyah so stepennoy nelineynostiu po proizvodnym. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta, № 1(33) : 12-19. (In Russian).

7. Рахмелевич И.В. 2014. О решениях многомерного уравнения Клеро с мультиоднородной функцией от производных. Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика, 14(4) : 374-381.

Rakhmelevich I.V. 2014. O resheniyah mnogomernogo uravneniya Clairaut s multiodnorodnoy funkciey ot proizvodnyh. Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seria. Seria: Matematica. Mehanica. Informatica, 14(4): 374-381. (In Russian).

8. Рахмелевич И.В. 2016. О редукции многомерных уравнений первого порядка с мультиоднородной функцией от производных Известия высших учебных заведений. Математика, №4 : 57-67.

Rakhmelevich I.V. 2016. Reduction of multidimensional first order equations with multi-homogeneous function of derivatives. Russian Mathematics, .60.(4): 47-55.